两端固支叠层圆柱厚壳轴对称问题的精确解析解

胡文锋[1,2],师雷[1,3],王彪[1],汪超[1],刘涛[1],刘一华[4]

(1. 安徽工业大学机械工程学院,243032 马鞍山;
2. 安徽工业大学液压振动与控制教育部工程研究中心,243032 马鞍山;
3. 新风光电子科技股份有限公司,272500 济宁;4. 合肥工业大学土木与水利工程学院,230009 合肥)

摘　要:基于柱坐标系下的三维弹性力学基本方程,采用状态空间法得到两端固支单层与叠层圆柱厚壳轴对称问题的精确解析解。为严格满足固支端的边界条件,将固支端的边界位移函数作为状态变量引入状态方程,采用增维方法把非齐次状态方程变为齐次状态方程,并通过层合渐近技术将变系数状态矩阵转为常系数矩阵进行求解。所得到的解不仅严格满足三维弹性力学基本方程,而且严格满足固支边界条件,是真正意义上的三维精确解。算例表明,本研究解与有限元解吻合,具有很高的精度,且关于级数项数和分层数具有很好的收敛性。另外,通过圆柱厚壳各力学量沿径向和轴向的精确分布规律分析了厚径比和跨径比变化对位移和应力分布的影响。

关键词:固支端;圆柱厚壳;状态方程;边界位移函数;精确解析解

中图分类号:TU33^{+}3　　**文献标志码:**A

Exact analytical solutions for axisymmetric problem of laminated cylindrical thick shells with two clamped ends

HU Wenfeng[1,2], SHI Lei[1,3], WANG Biao[1], WANG Chao[1], LIU Tao[1], LIU Yihua[4]

(1. School of Mechanical Engineering, Anhui University of Technology, 243032 Maanshan, China; 2. Engineering Research Center of Hydraulic Vibration and Control, Ministry of Education, Anhui University of Technology, 243032 Maanshan, China; 3. WindSun Science & Technology Co., Ltd, 272500 Jining, China; 4. School of Civil Engineering, Hefei University of Technology, 230009 Hefei, China)

Abstract: Based on the three-dimensional basic equations of elasticity in cylindrical coordinates, the state space method was used to solve axisymmetric problem of thick single and laminated cylindrical shells with two clamped ends. To satisfy strictly the boundary conditions of the clamped ends, boundary displacement functions introduced into the state equations as state variables, the nonhomogeneous state equations were transformed into the homogeneous state equations by employing the dimensional expanding method, and variable coefficient state matrixes were changed into constant coefficient matrixes with the approximate laminate technique by dividing the layer into sub-layers. The three-dimensional basic equations of elasticity and all the boundary conditions are satisfied strictly, the exact three-dimensional analytical solutions are

收稿日期:2021-05-18　　**修回日期:**2022-04-16

基金项目:国家自然科学基金青年基金资助项目(No. 12102001);教育部工程研究中心(安徽工业大学)开放基金(No. HVC201903);安徽教育厅高校自然科学研究项目(No. KJ2019A0091)

通信作者:胡文锋,讲师。E-mail:huwenfeng4007@sina.com

引用格式:胡文锋,师雷,王彪,等. 两端固支叠层圆柱厚壳轴对称问题的精确解析解[J]. 应用力学学报,2022,39(4):748-757.
HU Wenfeng, SHI Lei, WANG Biao, et al. Exact analytical solutions for axisymmetric problem of laminated cylindrical thick shells with two clamped ends[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2022, 39(4):748-757.

obtained. The results of two examples show that the present solutions obtained have high precision by comparing with FEM (Finite Element Method) solutions, and have good constringency with the number of series terms and sub-layers. In addition, the influences of thickness-radius ratio and span-radius ratio on the distributions of the displacements and stresses of cylindrical thick shells along the radial and axial directions are analyzed.

Key words: clamped end; cylindrical thick shell; state equation; boundary displacement function; exact analytical solution

复合材料圆柱壳因其几何结构合理，材料性能优越，能够适应于各种极端和复杂的应用环境，在航空航天、船舶、机械和土木等工程领域中得到了广泛应用。复合材料圆柱壳常出现厚度大、各向异性和不均匀性等特点，从而增加了力学分析的求解难度；但其常作为结构中的重要构件，通常会提出更高求解精度的要求。这对矛盾使得传统薄壳理论不再满足求解要求，因此众多学者提出并发展了考虑横向剪切变形影响的中厚壳理论，主要包括一阶剪切理论[1]和高阶剪切理论[2]。为克服 Reissner 一阶剪切理论中剪切因子[1]的影响，Reddy 等[2]建立了层合壳的高阶剪切变形理论，更好地满足了壳体内外表面切应力为零的条件，被广泛应用于层合壳的求解[3]中。但是上述各理论均引入了人为假设，三维弹性力学基本方程不能完全相容，其求解精度随着厚度的增加开始下降，且无法获得位移和应力沿厚度方向的精确分布规律。

为获得圆柱壳真正意义上的三维精确解，必须抛弃任何有关位移或应力模式的人为假设，严格满足三维弹性力学基本方程。国内外学者做了大量研究工作[4-5]。范家让[6]应用状态空间法建立了形式简单且统一的状态方程，得到了强厚度叠层圆柱壳的静力、动力和稳定性问题的三维精确解，因状态空间法能很好地处理不同材料层间的连续性问题，被广泛应用于叠层结构的精确求解。Tarn 等[7]通过哈密顿状态空间法精确分析了横观各向同性弹性圆柱体的轴对称问题。边祖光等[8]采用层合渐近模型，利用层间连续条件建立了状态变量的递推关系，求得正交各向异性功能梯度材料(functionally graded materials, FGM)圆柱壳自由振动的频率方程。

传统状态空间法面对含非简支边界时通过傅里叶级数分离变量后，边界条件无法自动满足，求解较为困难。故借助数值离散法来满足边界条件的半解析解法在 FGM 圆柱厚壳结构中取得了广泛的应用。文献[9-10]应用状态空间法和微分求积法，得到了圆柱壳动力学问题的精确解。Santos 等[11]采用有限元法处理 FGM 圆柱壳的轴对称弯曲问题，但其解只是近似弹性理论解。Wu 等[12]结合状态空间法与无网格法，得到了含固支端 FGM 夹层空心圆柱的三维精确解。

完全通过解析手段处理圆柱厚壳的非简支边界问题具有特殊的理论意义和参考价值，但现有文献[6,13-15]尚且不多。范家让[6]通过 δ 函数在固支端引入边界反力得到了固支叠层圆柱厚壳的精确解，盛宏玉等[13]则通过多项式函数引入边界位移函数处理固支边界条件。刘艳红等[14]在此基础上通过增维方法将非齐次状态方程转化为齐次状态方程，再进行精细积分，得到了相关问题的三维精确解。但是上述解只是在分层点处满足固支边界条件，并没有使固支端沿厚度方向严格满足边界条件。胡文锋等[15]针对矩形叠层厚板问题，将非简支边上的边界位移函数看作状态变量引入状态方程，并通过增维方法将非齐次状态方程转化为齐次状态方程，所得到的解严格满足固支边界条件。本研究针对两端固支叠层圆柱厚壳，为严格满足固支边界条件，拟采用文献[15]的方法进行分析，得到圆柱壳轴对称问题的精确解。

1　圆柱厚壳的状态方程及其解析解

1.1　单层圆柱厚壳

图 1 所示为一两端固支轴对称正交各向异性单层圆柱厚壳，其长度为 l，内径为 R_b，外径为 R_a，其厚度 $h = R_a - R_b$，中径(即平均半径) $R_0 = (R_a + R_b)/2$，坐标轴沿圆柱厚壳材料弹性主方向，u、v 和 w 分别表示圆柱壳沿轴向 x、周向 θ 和径向 r 的位移。以下从三维弹性理论来分析壳体内、外表面受轴对称载荷作用的静力响应。

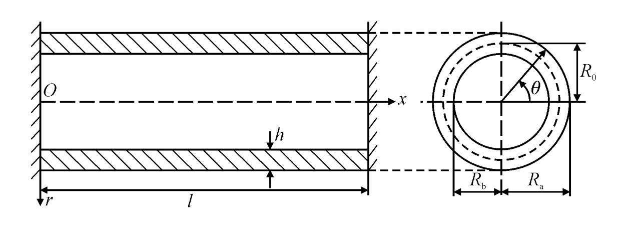


图 1　两端固支单层圆柱厚壳

Fig. 1　Single thick cylindrical shell with clamped ends

在柱坐标系下，当不计体力时，静力学平衡微分方程为

$$\begin{cases}\partial\sigma_x/\partial x+\partial\tau_{\theta x}/(r\partial\theta)+\partial\tau_{rx}/\partial r+\tau_{rx}/r=0\\ \partial\tau_{x\theta}/\partial x+\partial\sigma_\theta/(r\partial\theta)+\partial\tau_{r\theta}/\partial r+2\tau_{r\theta}/r=0\\ \partial\tau_{xr}/\partial x+\partial\tau_{\theta r}/(r\partial\theta)+\partial\sigma_r/\partial r+(\sigma_r-\sigma_\theta)/r=0\end{cases}\tag{1}$$

对于轴对称问题，圆柱厚壳的位移 v、应力 $\tau_{\theta x}$、$\tau_{r\theta}$ 和 σ_θ 对 θ 的偏导数为零，其应力-位移关系为[6]

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_\theta\\ \sigma_r\\ \tau_{rx}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}&0\\ C_{12}&C_{22}&C_{23}&0\\ C_{13}&C_{23}&C_{33}&0\\ 0&0&0&C_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\partial u/\partial x\\ w/r\\ \partial w/\partial r\\ \partial u/\partial r+\partial w/\partial x\end{Bmatrix}\tag{2}$$

两固支端的边界条件为

$$x=0、l,u=0,w=0\tag{3}$$

将式(2)和式(1)联立，消去应力分量 σ_x 和 σ_θ，可以得到如下矩阵形式[6]，即

$$\partial\boldsymbol{R}/\partial r=\boldsymbol{DR}\tag{4}$$

其中：$\boldsymbol{R}=[u\quad \sigma_r\quad \tau_{rx}\quad w]^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0&0&C_8&-\alpha\\ C_3\alpha/r&-(C_5+1)/r&-\alpha&C_4/r^2\\ -C_2\alpha^2&C_1\alpha&-1/r&-C_3\alpha/r\\ C_1\alpha&C_7&0&C_5/r\end{bmatrix},$$

$\alpha=\partial/\partial x$，$C_1=-C_{13}/C_{33}$，$C_2=C_{11}-C_{13}^2/C_{33}$，$C_3=C_{12}-C_{13}C_{23}/C_{33}$，$C_4=C_{22}-C_{23}^2/C_{33}$，$C_5=-C_{23}/C_{33}$，$C_7=1/C_{33}$，$C_8=1/C_{55}$。

被消去的 σ_x 和 σ_θ 由式(2)可以求出其形式为

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_\theta\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_2\alpha&-C_1&0&C_3/r\\ C_3\alpha&-C_5&0&C_4/r\end{bmatrix}\boldsymbol{R}\tag{5}$$

为分离变量，结合两端固支的边界条件，现将各力学量展成如下形式的傅里叶级数[6]，即

$$u=\sum_m U_m(r)\cos(\zeta x),\sigma_r=\sum_m\sigma_{rm(r)}\sin(\zeta x),$$
$$\tau_{rx}=\sum_m\tau_{rxm(r)}\cos(\zeta x),w=\sum_m W_m(r)\sin(\zeta x)\tag{6}$$

其中：$\zeta=m\pi/l$；m 为非负整数。由上述傅里叶级数形式可知，当 $x=0,l$ 时，$w=0$ 的条件已经自动满足，$u=0$ 尚未满足，故将式(6)中的 u 改为如下形式。

$$u=\sum_m U_m(r)\cos(\zeta x)+f_1(x)u^{(0)}(r)+f_2(x)u^{(l)}(r)\tag{7}$$

其中：$u^{(0)}(r)$ 和 $u^{(l)}(r)$ 分别为固支端 $x=0$ 和 $x=l$ 处的待定边界位移函数，由边界条件 $u=0$ 确定；$f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 为选定的关于 x 的函数，其函数形式不固定，可以设为多项式形式，故这里采用最简单的一次函数，即

$$f_1(x)=1-x/l,\quad f_2(x)=x/l\tag{8}$$

将函数式(8)及其一二阶导数也展成相应的傅里叶级数，即

$$\begin{aligned}f_1(x)&=1/2+\sum_m A_{1m}\cos(\zeta x),\\ f_2(x)&=1/2+\sum_m A_{2m}\cos(\zeta x),\\ \mathrm{d}f_1(x)/\mathrm{d}x&=\sum_m B_{1m}\sin(\zeta x),\\ \mathrm{d}f_2(x)/\mathrm{d}x&=\sum_m B_{2m}\sin(\zeta x),\\ \mathrm{d}^2f_1(x)/\mathrm{d}x^2&=\sum_m G_{1m}\cos(\zeta x),\\ \mathrm{d}^2f_2(x)/\mathrm{d}x^2&=\sum_m G_{2m}\cos(\zeta x)\end{aligned}\tag{9}$$

其中：$A_{1m}=2[1-\cos(m\pi)]/(m^2\pi^2)$，$A_{2m}=2[m\pi\cdot\sin(m\pi)+\cos(m\pi)-1]/(m^2\pi^2)$，$B_{1m}=2[\cos(m\pi)-1]/(m\pi l)$，$B_{2m}=2(1-\cos m\pi)/(m\pi l)$，$G_{1m}=0$，$G_{2m}=0$。

为满足边界条件，将式(7)代入边界条件 $u=0$，令 $x=0,l$，可以得到

$$\sum_m U_m(r)+f_1(0)u^{(0)}(r)+f_2(0)u^{(l)}(r)=0,$$
$$\sum_m(-1)^m U_m(r)+f_1(l)u^{(0)}(r)+f_2(l)u^{(l)}(r)=0\tag{10}$$

将式(6)和式(7)代入式(4)可以得到对于任意 m 关于 $\boldsymbol{R}_m(r)$ 的非齐次状态方程，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{R}_m(r)/\mathrm{d}r+\boldsymbol{A}_m^{(0)}\mathrm{d}u^{(0)}(r)/\mathrm{d}r+\boldsymbol{A}_m^{(l)}\mathrm{d}u^{(l)}(r)/\mathrm{d}r$$
$$=\boldsymbol{D}_m\boldsymbol{R}_m(r)+\boldsymbol{B}_m^{(0)}u^{(0)}(r)+\boldsymbol{B}_m^{(l)}u^{(l)}(r)\tag{11}$$

其中：

$\boldsymbol{R}_m(r)=[U_m(r)\quad \sigma_{rm}(r)\quad \tau_{rxm}(r)\quad W_m(r)]^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{A}_m^{(0)}=\begin{cases}[1/2\quad 0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}&(m=0)\\ [A_{1m}\quad 0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}&(m\neq 0)\end{cases},$$

$$A_m^{(l)}=\begin{cases}[1/2 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}} & (m=0)\\ [A_{2m} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}} & (m\neq 0)\end{cases},$$

$$\boldsymbol{D}_m=\begin{bmatrix}0 & 0 & C_8 & -\zeta\\ -C_3\zeta/r & -(C_5+1)/r & \zeta & C_4/r^2\\ C_2\zeta^2 & C_1\zeta & -1/r & -C_3\zeta/r\\ -C_1\zeta & C_7 & 0 & C_5/r\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_m^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\ C_3B_{1m}/r\\ -C_2G_{1m}\\ C_1B_{1m}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_m^{(l)}=\begin{bmatrix}0\\ C_3B_{2m}/r\\ -C_2G_{2m}\\ C_1B_{2m}\end{bmatrix}$$

由于非齐次状态方程(11)中矩阵 $\boldsymbol{D}_m$、$\boldsymbol{B}_m^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{B}_m^{(l)}$ 的系数含有变量 r，属于变系数状态矩阵，不易求解。如图 2 所示，本研究采用层合渐近模型[8]，将单层壳沿径向分成足够多的 k 层，则每层厚度 $h_0=h/k$，对于任意的第 j $(j=1,2,\cdots,k)$ 子层，其内径为 $R_j=R_b+(k-1)h_0$，外径 $R_{j+1}=R_b+kh_0$，中径 $R_{0j}=R_b+(k-0.5)h_0$，现将第 j 子层变系数状态矩阵 $\boldsymbol{D}_m$、$\boldsymbol{B}_m^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{B}_m^{(l)}$ 中的变量 r 用第 j 层的中径 R_{0j} 表示，使之变为常系数矩阵 $\boldsymbol{D}_{mj}$、$\boldsymbol{B}_{mj}^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{B}_{mj}^{(l)}$，形式如下。

$$\boldsymbol{D}_{mj}=\begin{bmatrix}0 & 0 & C_8 & -\zeta\\ -C_3\zeta/R_{0j} & -(C_5+1)/R_{0j} & \zeta & C_4/R_{0j}^2\\ C_2\zeta^2 & C_1\zeta & -1/R_{0j} & -C_3\zeta/R_{0j}\\ -C_1\zeta & C_7 & 0 & C_5/R_{0j}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_{mj}^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\ C_3B_{1m}/R_{0j}\\ -C_2G_{1m}\\ C_1B_{1m}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_{mj}^{(l)}=\begin{bmatrix}0\\ C_3B_{2m}/R_{0j}\\ -C_2G_{2m}\\ C_1B_{2m}\end{bmatrix}$$

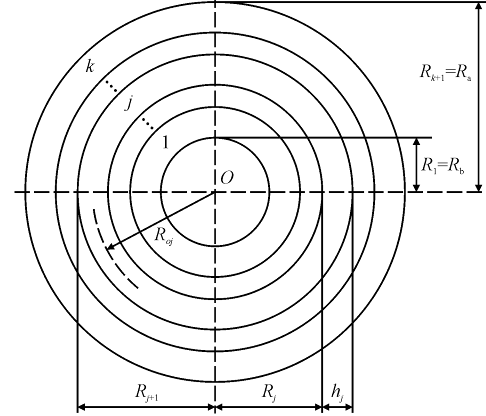


图 2　圆柱厚壳层合渐近模型

Fig. 2　Approximate sub-layered model of thick cylindrical shell

为求解非齐次状态方程(11)，盛宏玉等[13]通过分层的方法把边界位移函数 $u^{(0)}(r)$ 和 $u^{(l)}(r)$ 假设成折线分布函数，只是在分层处满足边界条件式(10)。参考胡文锋等[15]对于含固支边矩形厚板的求解方法，为严格满足圆柱厚壳固支端的边界条件式(10)，则对任意第 j 子层，该式关于 r 的导数均为零，即

$$\begin{cases}\sum\limits_m \mathrm{d}U_{mj}(r)/\mathrm{d}r+f_1(0)\mathrm{d}u_j^{(0)}(r)/\mathrm{d}r+\\ \quad f_2(0)\mathrm{d}u_j^{(l)}(r)/\mathrm{d}r=0\\ \sum\limits_m(-1)^m\mathrm{d}U_{mj}(r)/\mathrm{d}r+f_1(l)\mathrm{d}u_j^{(0)}(r)/\mathrm{d}r+\\ \quad f_2(l)\mathrm{d}u_j^{(l)}(r)/\mathrm{d}r=0\end{cases} \tag{12}$$

考虑到 $U_{mj}(r)$、$u_j^{(0)}(r)$ 和 $u_j^{(l)}(r)$ 在任意两子层交界面均是连续的，故任意子层均满足式(12)，需要圆柱厚壳任一点处满足边界条件式(10)，即边界条件(10)沿厚度严格满足，这里以内表面为例。

$$\begin{cases}\sum\limits_m U_m(R_b)+f_1(0)u^{(0)}(R_b)+f_2(0)u^{(l)}(R_b)=0\\ \sum\limits_m(-1)^mU_m(R_b)+f_1(l)u^{(0)}(R_b)+\\ \quad f_2(l)u^{(l)}(R_b)=0\end{cases} \tag{13}$$

对于第 j 子层(即 $R_j\leqslant r\leqslant R_{j+1}$)，将式(11)和式(12)联立，把固支端的边界位移函数 $u^{(0)}(r)$ 和 $u^{(l)}(r)$ 作为状态变量引入状态方程，并通过增维方法[14]将状态方程合并成如下形式。

$$\boldsymbol{\Theta}_j\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}(r)/\mathrm{d}r=\overline{\boldsymbol{\Theta}}_j\boldsymbol{\Phi}(r) \tag{14}$$

式中：

$$\boldsymbol{\Phi}(r)=[R_1(r)\ \ R_2(r)\ \ \cdots\ \ R_m(r)\ \ u^{(0)}(r)\ \ u^{(l)}(r)]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\Theta}_j=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1^{(0)} & \boldsymbol{A}_1^{(l)}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^{(0)} & \boldsymbol{A}_2^{(l)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}_m^{(0)} & \boldsymbol{A}_m^{(l)}\\ \boldsymbol{\theta} & \boldsymbol{\theta} & \cdots & \boldsymbol{\theta} & f_1(0) & f_2(0)\\ \boldsymbol{\theta}_1 & \boldsymbol{\theta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\theta}_m & f_1(l) & f_2(l)\end{bmatrix},$$

$$\overline{\boldsymbol{\Theta}}_j=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{1j} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_{1j}^{(0)} & \boldsymbol{B}_{1j}^{(l)}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}_{2j} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_{2j}^{(0)} & \boldsymbol{B}_{2j}^{(l)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{D}_{mj} & \boldsymbol{B}_{mj}^{(0)} & \boldsymbol{B}_{mj}^{(l)}\\ \bar{\boldsymbol{\theta}} & \bar{\boldsymbol{\theta}} & \cdots & \bar{\boldsymbol{\theta}} & 0 & 0\\ \bar{\boldsymbol{\theta}} & \bar{\boldsymbol{\theta}} & \cdots & \bar{\boldsymbol{\theta}} & 0 & 0\end{bmatrix},$$

其中：$\boldsymbol{\theta}=[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$，$\boldsymbol{\theta}_m=[(-1)^m\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$，

$\bar{\boldsymbol{\theta}}=[0\quad 0\quad 0\quad 0]$，$\boldsymbol{I}$ 为 4 阶单位矩阵，$\boldsymbol{O}$ 为 4 阶零矩阵。

将状态方程(14)的两边同乘以 Θ_j^{-1}，得到齐次状态方程，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}(r)/\mathrm{d}r=\boldsymbol{\Lambda}_j\boldsymbol{\Phi}(r) \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}_j=\boldsymbol{\Theta}_j^{-1}\cdot\overline{\boldsymbol{\Theta}}_j$。

根据状态空间理论，齐次状态方程(15)的解为

$$\boldsymbol{\Phi}(r)=\boldsymbol{\Pi}_j(r)\boldsymbol{\Phi}(R_j) \tag{16}$$

其中：$\boldsymbol{\Pi}_j(r)=\mathrm{e}^{\Lambda_j\cdot r}$ 称为状态转移矩阵；$\boldsymbol{\Phi}(R_j)$ 为圆柱壳第 j 子层内界面处的状态向量。

在式(16)中令 $r=h_j$，可得第 j 子层外界面和内界面之间的关系式为

$$\boldsymbol{\Phi}(R_{j+1})=\boldsymbol{\Pi}_j(h_j)\boldsymbol{\Phi}(R_j) \tag{17}$$

根据相邻子层间的连续条件，从第 1 子层开始逐层类推，可得到圆柱厚壳外表面(第 k 子层的外表面)与内表面(第 1 子层内表面)之间的关系为

$$\boldsymbol{\Phi}(R_a)=\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Phi}(R_b) \tag{18}$$

其中：$\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{\Pi}_k(h_k)\cdots\boldsymbol{\Pi}_2(h_2)\boldsymbol{\Pi}_1(h_1)$；$\boldsymbol{\Phi}(R_a)=\boldsymbol{\Phi}(R_{k+1})$；$\boldsymbol{\Phi}(R_b)=\boldsymbol{\Phi}(R_1)$。

1.2 叠层圆柱厚壳

对于由 p 层构成的叠层圆柱厚壳，对任意的第 i ($i=1,2,\cdots,p$)层，利用上述单层圆柱壳的方法，将每一层分为足够多的 k_i 层(总层数 $k=\sum_1^p k_i$)，则可得到第 i 层的内界面和外界面之间状态向量的关系为

$$\boldsymbol{\Phi}(R_{ia})=\boldsymbol{\Psi}^{(i)}\boldsymbol{\Phi}(R_{ib}) \tag{19}$$

其中：R_{ib} 和 R_{ia} 分别为第 i 层的内径和外径；$\boldsymbol{\Psi}^{(i)}=\boldsymbol{\Pi}_{k_i}(h_{k_i}^{(i)})\cdots\boldsymbol{\Pi}_2(h_2^{(i)})\cdot\boldsymbol{\Pi}_1(h_1^{(i)})$ 为第 i 层的状态转移矩阵，$h_j^{(i)}$ ($1\leqslant j\leqslant k_i$)为第 i 层中第 j 子层的厚度。

利用任意相邻两层间的连续条件

$$\boldsymbol{\Phi}(R_{ia})=\boldsymbol{\Phi}(R_{i+1,b}) \tag{20}$$

从第一层开始逐层类推，便可得到叠层圆柱厚壳外表面与内表面之间的关系，即

$$\boldsymbol{\Phi}(R_a)=\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Phi}(R_b) \tag{21}$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{\Psi}^{(p)}\cdots\boldsymbol{\Psi}^{(2)}\cdot\boldsymbol{\Psi}^{(1)}$。

可见，叠层圆柱厚壳的状态转移方程与单层圆柱厚壳的形式一致，只是将状态转移矩阵进行简单的叠乘。

通常圆柱厚壳静力问题的内、外表面处的应力 $\sigma_r(R_b)$、$\tau_{rx}(R_b)$ 和 $\sigma_r(R_a)$、$\tau_{rx}(R_a)$ 是已知的。以壳体内表面受均布载荷 q 作用为例，将内外表面的载荷按式(6)级数展开的系数为

$$\sigma_{rm}(R_a)=2q[\cos(m\pi)-1]/(m\pi),$$
$$\sigma_{rm}(R_b)=\tau_{rxm}(R_a)=\tau_{rxm}(R_b)=0 \tag{22}$$

再结合式(13)和式(18)，可以求出状态向量 $\boldsymbol{\Phi}(R_a)$ 和 $\boldsymbol{\Phi}(R_b)$ 中的其余未知量；然后，从第一层开始逐层类推，由式(17)便可得到任意子层的 $\boldsymbol{\Phi}(R_j)$，再由式(16)便可得到任意子层的 $\boldsymbol{\Phi}(r)$；最后，结合式(8)和式(9)便可得到圆柱厚壳任意位置相关位移和应力分量。

将式(7)和式(6)中的第 2 式、第 4 式代入式(5)，便可得到面内应力分量 σ_x 和 σ_θ 的表达式，即

$$\begin{cases}\sigma_x=\sum_m[-C_2\zeta U_m(r)-C_1\sigma_{rm}(r)+\\ \quad C_3W_m(r)/r]\sin(\zeta x)+C_2f_1'(x)u^{(0)}(r)+\\ \quad C_2f_2'(x)u^{(l)}(r)\\ \sigma_\theta=\sum_m[-C_3\zeta U_m(r)-C_5\sigma_{rm}(r)+\\ \quad C_4W_m(r)/r]\sin(\zeta x)+C_3f_1'(x)u^{(0)}(r)+\\ \quad C_3f_2'(x)u^{(l)}(r)\end{cases} \tag{23}$$

由于固支端($x=0$ 或 l)处的 $\partial w/\partial r=0$，由式(2)、式(6)、式(7)和式(8)可得

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_\theta\\ \sigma_r\end{Bmatrix}=\frac{1}{l}\begin{Bmatrix}C_{11}\\ C_{12}\\ C_{13}\end{Bmatrix}[-u^{(0)}(r)\quad u^{(l)}(r)] \tag{24}$$

2 算例分析

算例 1 一两端固支轴对称正交各向异性单层圆柱壳，内表面受均布载荷 q 作用，厚径比 $\lambda=h/R_0$，跨径比 $\kappa=l/R_0$，取弹性常数[6]为

$C_{12}/C_{11}=0.246\ 269$，$C_{13}/C_{11}=0.083\ 171\ 5$，
$C_{22}/C_{11}=0.543\ 103$，$C_{23}/C_{11}=0.115\ 017$，
$C_{33}/C_{11}=0.530\ 172$，$C_{55}/C_{11}=0.159\ 914$

针对厚径比 $\lambda=0.4$，跨径比 $\kappa=2\pi$ 的单层圆柱厚壳，图 3 给出了本研究解与三维有限元(finite element method，FEM)解的相对误差随分层数 k 和级数项数 m 的变化关系。有限元解是通过软件 ANSYS 采用 8 节点的 Soild183 单元在精细网格划分的情况下得到的结果。图 3(a)表明各力学量关于分层数 k 的收敛速度很快，当分层数 k 取到 10 时，各力学量已基本收敛，固支端中径处切应力 τ_{rx} 的相对误差最大，为 1.7%，其余位移和应力的相对误差均小于

0.2%。图 3(b)表明各力学量关于级数项数 m 的收敛速度也比较快，当级数项数 m 取到 49 时，位移 w、u 和应力 σ_x、σ_θ 的相对误差均小于 0.1%；应力 σ_r 的相对误差则波动收敛于 0.2%；τ_{rx} 收敛速度相对较慢，在 m 取到 99 时，其相对误差控制在 1.7% 以内。为了取得足够精确的结果，将取 $k=20$、$m=99$ 时的计算结果作为本研究解。

表 1 给出了跨径比 $\kappa=2\pi$，厚径比 λ 取值不同时单层圆柱厚壳特定位置位移和应力的本研究解、有限元解和文献[6]解的比较。由表中可见，不同厚径比 λ 的情况下，本研究解和文献[6]解在跨中位置都可以获得十分精确的结果；但本研究解因能够严格满足固支边界条件在固支端处依然能够给出精确的应力结果，这是完全符合圣维南原理的解释，固支边界条件的满足情况对离固支端较远处的影响较小，对固支端附近区域的影响很大；而固支端处的应力较大，往往是整个结构的危险点，故对其进行精确的计算具有非常重要的理论意义和工程应用价值。需要注意的是，因为有限元解在边界尖角处很难得到精确的应力结果，故表 1 中未取两端内外表面位置的应力 σ_x、σ_θ 和 τ_{rx} 结果。

表 1　单层圆柱壳的位移和应力

Tab. 1　Displacements and stresses of single cylindrical shell

条件	$\frac{r-R_b}{h}$	$\lambda=0.2$			$\lambda=0.4$			$\lambda=0.8$		
		本研究	FEM	文献[6]	本研究	FEM	文献[6]	本研究	FEM	文献[6]
$wC_{11}/(qh)$, $x=l/2$	0	46.205 1	46.206 0		11.026 7	11.026 5		2.475 0	2.473 6	
	0.5	44.531 5	44.529 5		9.928 6	9.927 5		1.771 0	1.770 0	
	1	43.448 9	43.447 0	43.447 0	9.407 1	9.406 0	9.407 0	1.569 3	1.568 3	1.569 0
$uC_{11}/(qh)$, $x=l/16$	0	7.958 4	7.949 5		2.171 6	2.167 4		0.475 7	0.473 8	
	0.5	2.577 7	2.578 2		0.622 6	0.622 5		0.115 9	0.115 8	
	1	-2.707 0	-2.702 8		-0.861 6	-0.860 4		-0.173 6	-0.173 3	
σ_x/q, $x=l/2$	0	2.003 5	1.967 5	1.905 0	1.029 5	1.002 0	0.966 0	0.546 8	0.523 9	0.504 0
	0.5	1.748 6	1.748 6		0.732 6	0.732 5		0.235 1	0.234 9	
	1	1.571 0	1.587 2	1.628 0	0.570 5	0.578 0	0.596 0	0.163 3	0.165 6	0.171 0
σ_θ/q, $x=l/2$	0	5.062 2	5.052 6	5.039 0	2.624 3	2.616 6	2.609 0	1.482 7	1.475 2	1.473 0
	0.5	4.472 2	4.472 0		1.954 2	1.954 0		0.675 0	0.674 6	
	1	4.039 7	4.043 2	4.053 0	1.591 2	1.592 7	1.597 0	0.455 1	0.455 3	0.457 0
σ_x/q, $x=0$	0.1	8.239 8	7.996 7		3.116 8	3.081 4		0.969 4	0.958 9	
	0.5	1.902 9	1.880 0		0.835 1	0.824 5		0.282 3	0.278 7	
	0.9	-4.075 2	-3.967 4		-1.225 2	-1.213 1		-0.224 8	-0.222 1	
σ_θ/q, $x=0$	0.1	2.029 2	1.970 1		0.767 6	0.758 9		0.238 7	0.236 1	
	0.5	0.468 6	0.462 9		0.205 7	0.203 0		0.069 6	0.068 6	
	0.9	-1.003 6	-0.977 9		-0.301 7	-0.298 8		-0.055 4	-0.054 7	
τ_{rx}/q, $x=0$	0.1	1.661 7	1.784 4	1.832 0	1.143 1	1.135 1	1.119 0	0.678 7	0.668 1	0.661 0
	0.5	1.463 0	1.383 1		0.759 2	0.746 5		0.293 2	0.291 6	
	0.9	1.111 5	1.054 0	1.139 0	0.552 9	0.517 6	0.524 0	0.181 5	0.175 4	0.177 0

注：本研究求解时，取 $m=99$，$k=20$；文献[6]求解时，$m=199$，k 分别取 16、20 和 22。

图 4 给出了跨径比 $\kappa=2\pi$，单层圆柱壳厚径比 λ 不同取值时本研究解与有限元解各力学量归一化处理后沿径向 r 的分布规律。从图中可见，本研究解与有限元解吻合得很好，且精度不受厚径比 λ 的影响，给出各力学量的精确分布规律，突显了状态空间法对圆柱厚壳求解的优越性。当厚径比 λ 较小（$\lambda\leqslant0.2$）时，薄壳的位移 u、w 和应力 σ_x、σ_θ、σ_r 均接近线性分布，较符合经典薄壳理论的直法线假设，切应力 τ_{rx} 内、外两面分布较为对称，符合考虑剪切影响的中厚度壳理论。当厚径比 λ 较大（$\lambda\geqslant0.4$）时，所有力学量都不是按线性分布的，切应力 τ_{rx} 在固支端内、外表面附近变化较快，位移 w 随径向变化较大，应力 σ_r（$\sigma_{r\max}/q=1$）的数值接近或超过了应力 σ_x 和 σ_θ 的数值（表 1），故径向的应变和应力已不可忽略，这说明传统的薄壳理论和中厚度壳理论不再适用于圆柱厚壳。需要注意的是，由于有限元

解在边界尖角处的结果不精确，故这里忽略了 τ_{rx} 在内、外表面处的有限元结果。

图 3　本研究解与有限元解的相对误差随分层数和级数项数的变化

Fig. 3　Variation of relative error between present solution and FEM solution with the number of sub-layers and series terms

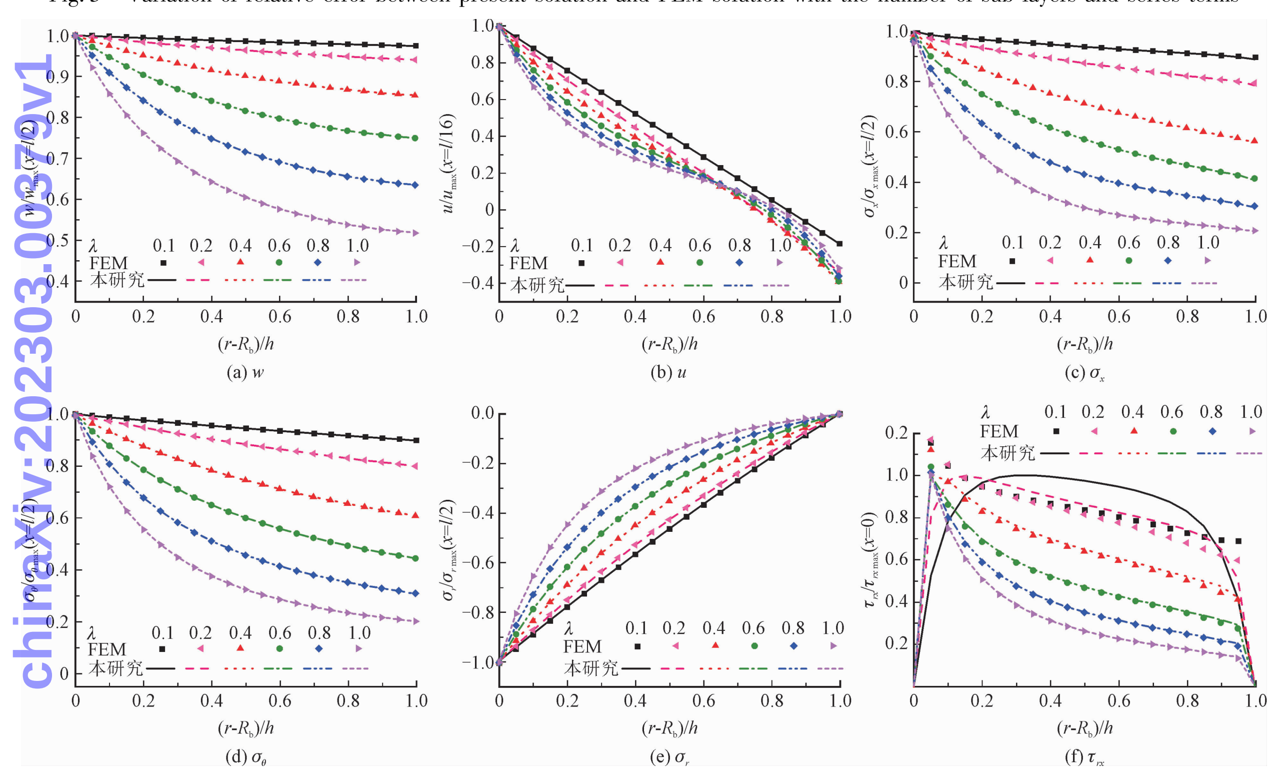


图 4　不同厚径比 λ 下位移和应力沿径向 r 的分布

Fig. 4　Displacement and stress distributions with r under different thickness-radius ratios λ

图 5 给出了厚径比 $\lambda=0.4$，跨径比 κ 不同取值时本研究解与有限元解部分力学量归一化处理后沿轴向 x 的分布规律。从图中可以看出，本研究解与有限元解吻合得很好，能够给出各力学量沿轴向 x 的精确分布规律。图 5 表明，当跨径比 κ 较小时，位移和应力基本上呈单调函数分布，其端部效应在全轴长内均有影响；随着跨径比 κ 的增大，端部效应的影响开始减小，只影响固支端附近的区域，跨中区域趋于均匀分布；尤其是当跨径比 κ 较大（$\kappa\geqslant5$）时，除位移 u 外，各力学量逐渐趋近于一条水平渐近线，该水平渐进线正是 $r\theta$ 面内平面应变问题（跨径比 $\kappa=\infty$时）的解。由图 5(b) 可见，由于端部效应的影响产生的轴向位移 u 在端部有较大数值，并沿轴向至跨中位置逐渐趋于零，故离开端部区域是一条斜直线。本研究解能够准确地描述由圣维南原理所忽略的端部效应，清晰地说明了跨径比 κ 对位移和应力分布规律的影响。

算例 2 两端固支三层圆柱厚壳内表面受均布载荷 q 作用，圆柱壳长为 $l=2\pi R_0$，厚度为 h，第一层与第三层的厚度 $h_1=h_3=0.1h$，第二层的厚度 $h_2=$

$0.8h$，R_0 为该三层壳的平均半径，第一层与第三层的材料相同，第二层的材料与算例 1 相同，第一层与第二层的材料常数比为 5，三层厚壳的各单层分层数分别为 $k_1=k_3=4$，$k_2=16$。

表 2 给出了跨径比 $\kappa=2\pi$，厚径比 λ 取不同值时叠层圆柱厚壳特定位置位移和应力的本研究解、有限元解和文献[6]解的比较。由表 2 可见，本研究解在不同厚径比的情况下都可以获得十分精确的结果，文献[6]解仅在分层处满足边界条件，而本研究解能够严格满足固支边界条件，故所得结果更精确。因为有限元解在边界尖角及交界处很难得到精确的应力结果，故本研究解两端内、外表面位置的应力 σ_x、σ_θ 和 τ_{rx} 与有限元解有相对较大的误差。

表 2　叠层圆柱壳的位移和应力

Tab. 2　Displacements and stresses of laminated cylindrical shell

条件	$\frac{r-R_b}{h}$	$\lambda=0.2$			$\lambda=0.4$			$\lambda=0.8$		
		本研究	FEM	文献[6]	本研究	FEM	文献[6]	本研究	FEM	文献[6]
$wC_{11}/(qh)$，$x=l/2$	0	25.602 4	25.601 0		6.040 8	6.040 3		1.227 6	1.227 1	
	0.1	25.451 6	25.449 5		5.948 5	5.947 8		1.169 1	1.168 6	
	0.5	24.602 3	24.601 5		5.398 2	5.398 0		0.873 6	0.873 4	
	0.9	23.975 6	23.973 5		5.061 0	5.060 5		0.742 9	0.742 7	
	1	23.878 3	23.876 5	23.877 0	5.022 1	5.021 8	5.022 0	0.732 6	0.732 3	0.733 0
σ_x/q，$x=l/2$	0	5.850 0	5.764 4	5.602 0	3.011 4	2.966 5	2.881 0	1.544 4	1.512 8	1.471 0
	0.1^-	5.576 1	5.635 1	5.649 0	2.783 5	2.807 0	2.826 0	1.290 0	1.300 9	1.315 0
	0.1^+	1.030 7	1.043 0	1.045 0	0.480 6	0.485 6	0.489 0	0.201 4	0.203 7	0.207 0
	0.5	0.940 4	0.940 3		0.380 0	0.380 0		0.107 8	0.107 8	
	0.9^-	0.866 2	0.859 0	0.854 0	0.317 5	0.315 6	0.313 0	0.080 0	0.079 5	0.079 0
	0.9^+	4.458 8	4.425 3	4.398 0	1.680 8	1.671 7	1.657 0	0.441 6	0.439 1	0.435 0
	1	4.301 9	4.343 2	4.438 0	1.594 1	1.607 0	1.644 0	0.410 0	0.413 4	0.423 0
σ_θ/q，$x=l/2$	0	14.411 8	14.390 0	14.350 0	7.545 0	7.532 7	7.514 0	3.986 2	3.976 1	3.969 0
	0.1^-	14.042 3	14.056 0	14.060 0	7.125 3	7.130 3	7.135 0	3.417 4	3.418 4	3.424 0
	0.1^+	2.691 6	2.695 0	2.695 0	1.319 8	1.321 3	1.322 0	0.605 3	0.605 6	0.607 0
	0.5	2.433 1	2.433 1		1.034 5	1.034 5		0.319 7	0.319 6	
	0.9^-	2.229 7	2.227 2	2.227 0	0.858 0	0.858 0	0.858 0	0.216 0	0.215 8	0.216 0
	0.9^+	11.325 4	11.316 0	11.310 0	4.422 7	4.420 0	4.417 0	1.137 9	1.136 9	1.136 0
	1	11.096 9	11.106 0	11.130 0	4.263 9	4.266 5	4.276 0	1.068 8	1.069 3	1.072 0
τ_{rx}/q　$x=0$	0.1	1.869 9	1.950 5	1.791 0	1.046 2	1.289 0	1.114 0	0.528 1	0.930 8	0.637 0
	0.5	1.122 5	1.074 6		0.526 4	0.521 5		0.173 2	0.172 5	
	0.9	1.266 0	1.320 1	1.129 0	0.491 0	0.626 3	0.504 0	0.121 4	0.255 5	0.1450

注："−"和"+"分别表示层间交接面的内面和外面；本研究解 $m=99$，$k_1+k_2+k_3$ 取 4+16+4，文献[6]解 $m=199$，$k_1+k_2+k_3$ 分别取 3+12+3、4+12+4 和 5+12+5。

图 6 给出了跨径比 $\kappa=2\pi$，厚径比 λ 取值不同时叠层圆柱厚壳本研究解与有限元解归一化处理后各力学量沿径向 r 的分布规律。由图 6 可见，本研究解与有限元解吻合得很好，且求解精度不受厚径比 λ 的影响，给出各力学量沿径向的精确分布规律，从而清楚地反映出材料层间的应力不连续性以及在不同材料层中的不同分布特点。当厚径比 λ 较小（$\lambda\leqslant0.2$）时，各单层内的位移 u、应力 σ_x 和 σ_θ 均接近线性分布，位移 w 和应力 σ_r 也随径向是均匀变化的，切应力 τ_{rx} 在内、外两端分布较为对称。当厚径比 λ 较大（$\lambda\geqslant0.4$）时，各单层内的位移 u、应力 σ_x 和 σ_θ 不再按线性分布，位移 w 和应力 σ_r 也随径向不再均匀变化。应力 σ_x 和 σ_θ 在不同材料层间的分布是不连续的，刚度系数小的材料中的应力要小于刚度系数大的材料中的应力，其他各力学量是连续分布的，但各力学量在不同材料层分布规律明显不同。

图 5　不同跨径比 κ 下位移和应力沿轴向 x 的分布

Fig. 5　Displacement and stress distributions with x under different span-radius ratios κ

图 6　不同厚径比 λ 下位移和应力沿径向 r 的分布

Fig. 6　Displacement and stress distributions of with r under different thickness-diameter ratios λ

3 结　论

通过将圆柱厚壳固支端的边界位移函数作为状态变量引入状态方程,严格满足了固支边界条件,建立叠层圆柱厚壳的齐次状态方程,得到了叠层圆柱厚壳轴对称问题的精确解析解。本研究解关于分层数和级数项数具有很好的收敛性,当分层数 k 取 10,级数项数 m 取 49 时,相对误差基本在 0.2% 以内,具有很高的精度。该解能够给出单层与叠层圆柱厚壳位移和应力沿径向的精确分布规律,且其精度不受厚径比 λ 和跨径比 κ 的影响,这是薄壳理论和中厚度壳理论所不能给出的。此外,该解因严格满足边界条件,在固支端处依然能够给出精确的应力分布,克服现有精确解法[13-14]对于非简支边界的局限性。

本研究方法为采用状态空间法分析一般边界条件问题提供了一种新的处理方法,严格满足三维弹性方程和边界条件,得到圆柱厚壳的精确解析解,可作为其他壳理论或数值解的参考依据。本研究方法可解决其它的非简支边界条件问题,并不受材料类型和载荷形式的影响,具有一般适用性;另外,本研究方法可进一步应用于其他叠层结构的热、电、力等多场耦合的各种静、动力学问题中。

参考文献:

[1] DONG S B,TSO F K W. On a laminated orthotropic shell theory including transverse shear deformation[J]. Journal of applied mechanics,1972,39(4):1091-1097.

[2] REDDY J N,LIU C F. A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells[J]. International journal of engineering science,1985,23(3):319-330.

[3] KUMAR A,CHAKRABARTI A,BHARGAVA P. Vibration analysis of laminated composite skew cylindrical shells using higher order shear deformation theory[J]. Journal of vibration and control, 2015,21(4):725-735.

[4] WU C P,LIU Y C. A review of semi-analytical numerical methods for laminated composite and multilayered functionally graded elastic/piezoelectric plates and shells[J]. Composite structures,2016, 147:1-15.

[5] KUMAR P,SRINIVASA C. On buckling and free vibration studies of sandwich plates and cylindrical shells:A review[J]. Journal of thermoplastic composite materials,2020,33(5):673-724.

[6] 范家让. 强厚度叠层板壳的精确理论[M]. 北京:科学出版社, 1996:226-250.

[7] TARN J Q,CHANG H H,TSENG W D. Axisymmetric deformation of a transversely isotropic cylindrical body: A hamiltonian state-space approach[J]. Journal of elasticity,2009,97(2):131-154.

[8] 边祖光,陈伟球,丁皓江. 正交各向异性功能梯度圆柱壳的自由振动[J]. 应用力学学报,2004,21(3):75-78.
BIAN Zuguang, CHEN Weiqiu, DING Haojiang. Free vibration of orthotropic functionally graded cylindrical shells[J]. Chinese journal of applied mechanics,2004,21(3):75-78(in Chinese).

[9] LIANG X,KOU H L,LIU G H,et al. A semi-analytical state-space approach for 3D transient analysis of functionally graded material cylindrical shells[J]. Journal of Zhejiang University-Science A, 2015,16(7):525-540.

[10] ALIBEIGLOO A. Static and vibration analysis of axi-symmetric angle-ply laminated cylindrical shell using state space differential quadrature method[J]. International journal of pressure vessels and piping,2009,86(11):738-747.

[11] SANTOS H A,CRISTOVO M,MOTA S A,et al. A semi-analytical finite element model for the analysis of cylindrical shells made of functionally graded materials[J]. Composite structures, 2009, 91 (4):427-432.

[12] WU C P,JIANG R Y. A state space differential reproducing kernel method for the 3D analysis of FGM sandwich circular hollow cylinders with combinations of simply-supported and clamped edges [J]. Composite structures,2012,94(11):3401-3420.

[13] 盛宏玉,高荣誉. 非均匀变温时两端固支叠层闭口厚柱壳的热应力分析[J]. 工程力学,2000,17(4):117-123.
SHENG Hongyu,GAO Rongyu. Thermal stress analysis for a thick laminated cylinder with two clamped edges under non-uniform temperature variation[J]. Engineering mechanics,2000,17(4):117-123(in Chinese).

[14] 刘艳红,陈庆远,卿光辉. 含固支边的压电层合开口圆柱壳的精确解法[J]. 机械强度,2010,32(6):946-952.
LIU Yanhong, CHEN Qingyuan, QING Guanghui. Analytical solution for laminated piezoelectric cylindrical open shells with clamped edges[J]. Journal of mechanical strength, 2010, 32(6): 946-952 (in Chinese).

[15] 胡文锋,刘一华. 含固支边矩形叠层厚板的状态空间新解法[J]. 力学学报,2015,47(5):762-771.
HU Wenfeng,LIU Yihua. A new state space solution for rectangular thick laminates with clamped edges[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics,2015,47(5):762-771(in Chinese).

(编辑　黄崇亚)